(IP)

SO(3) et les quaternions : Un isomorphisme exceptionnel

101, 103, 106, 108, 127, (151), 158, 161, 191, (204).

<u>Introduction</u> : Les rotations jouent un rôle central en géométrie dans l'espace et en informatique 3D. Deux groupes les décrivent : $SO(3)$ et $SU(2)$. On va montrer que $SU(2)/\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\} \cong SO(3)$, ce resultat est dit exceptionnel au sens où il n'a pas d'analogue en dimension supérieure.

Une application de resultat est de décrire une rotation R_θ d'axe $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ par le quaternion $Q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{1} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) U$ ainsi pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $R_\theta \vec{v} \leadsto Q V Q^{-1}$ où U, V sont les quaternions pures associés à $\vec{u}, \vec{v}$. [Si $\vec{u} = (b, c, d)$ alors $U = b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$]

→ <u>Théorème</u> : On a l'isomorphisme exceptionnel $SO(3) \cong \dfrac{SU(2)}{\{-\mathbf{1}, +\mathbf{1}\}}$

Démo : ① On considère l'action $\rho : SU(2) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $(U, Q) \longmapsto U Q U^{-1}$
(qui n'est pas trivial car $\mathbb{H}$ non abélien)

Soit $U \in SU(2)$, on pose $\varphi_U := \rho(U, \cdot)$, φ_U est une permutation de $\mathbb{H}$ (d'inverse $\varphi_{U^{-1}}$)
D'où $\Phi : SU(2) \to \mathfrak{S}(\mathbb{H})$, $U \mapsto \varphi_U$ est un morphisme de groupe.

② Soit $U \in SU(2)$, $N(U) N(U^{-1}) = N(UU^{-1}) = N(\mathbf{1}) = 1$ donc
$N(\varphi_U(Q)) = N(UQU^{-1}) = N(Q)$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$ (multiplicativité de la norme)
Comme φ_U est linéaire et conserve la norme N, $\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{H})$

③ On a $\varphi_U(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{I}$ pour tout $U \in SU(2)$: Soit $U \in SU(2)$, $Q \in \mathbb{I}$

$$\mathrm{Ré}(\varphi_U(Q)) = \frac{UQU^{-1} + \overline{UQU^{-1}}}{2} = \frac{UQ\overline{U} + \overline{UQ\overline{U}}}{2}$$
$$= \frac{UQ\overline{U} + \overline{\overline{U}}\,\overline{Q}\,\overline{U}}{2} = \frac{UQ\overline{U} + U\overline{Q}\,\overline{U}}{2} \quad (\text{car } \overline{UV} = \overline{V}\,\overline{U})$$
$$= U\underbrace{\left(\frac{Q + \overline{Q}}{2}\right)}_{= \mathrm{Ré}(Q) = 0}\overline{U} = 0$$

Par suite $\varphi_U|_{\mathbb{I}} \in \mathcal{O}(\mathbb{I}) \cong \mathcal{O}(3)$. (à l'aide de la bijection $\mathbb{I} \cong \mathbb{R}^3$, puis on "relève")
Notons $\tilde{\varphi}_U$ l'image de $\varphi_U|_{\mathbb{I}}$ par cette bijection et $\tilde{\Phi} : SU(2) \to \mathcal{O}(3)$, $U \mapsto \tilde{\varphi}_U$
on peut montrer que $\mathrm{Ker}(\tilde{\Phi}) = Z(\mathbb{H}) \cap SU(2) = \{-\mathbf{1}, +\mathbf{1}\}$.

④ Mq $\mathrm{Im}\,\tilde{\Phi} \subseteq SO(3)$. On munit $SU(2)$ de la topologie euclidienne en voyant $SU(2)$ comme $\mathbb{S}^3$ dans $\mathbb{R}^4$. De même on munit $\mathcal{O}(3)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Les coefficients de la matrice φ_U sont des polynômes en les coeff de U dans la base $(\mathbb{1}, I, J, K)$, donc $\tilde{\Phi}$ est continue.

De plus $\det : O(3) \longrightarrow \{-1, 1\}$ est continue d'où $\det \circ \tilde{\Phi} : SU(2) \to \{\pm 1\}$ est continue.

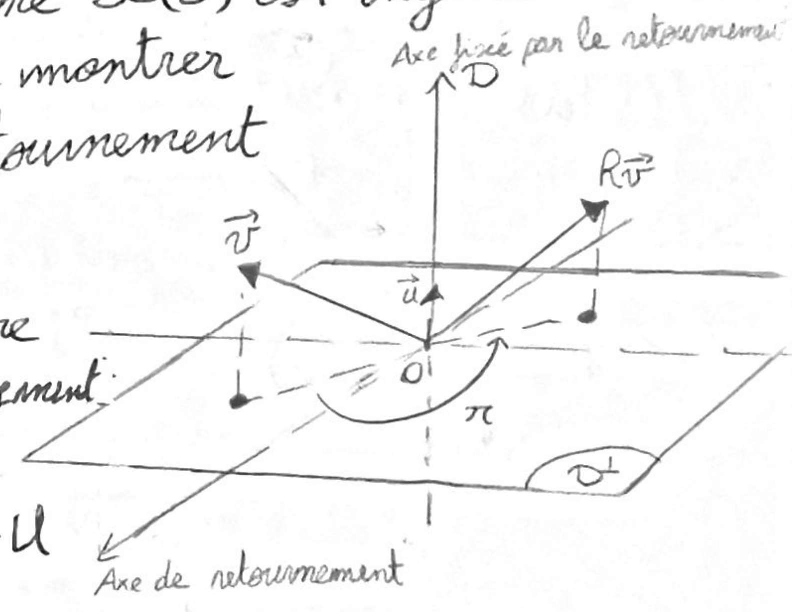
$\rightarrow$ <u>Lemme :</u> La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. En particulier $SU(2)$ est connexe par arcs.

Démo du lemme : Soient $a, b \in \mathbb{S}^{n-1}$ non antipodaux. On considère le chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $t \mapsto \dfrac{(1-t)a+tb}{\|(1-t)a+tb\|}$ qui est bien définie, continue qui relie a et b.

Si a et b sont antipodaux on relie un point $c \in \mathbb{S}^{n-1}$ non antipodal à a et b, avec a et avec b, puis on concatène. $\boxtimes$

Retour à la démo du théorème : $SU(2)$ est connexe donc $\det \circ \tilde{\Phi}(SU(2))$ est connexe, or $\{-1, 1\}$ est disconnexe donc $\det \circ \tilde{\Phi}(SU(2))$ est un singleton d'où $\det \circ \tilde{\Phi}(SU(2)) = \{+1\}$ car $\det(\tilde{\Phi}(\mathbb{1})) = \det Id_3 = 1$. D'où $\operatorname{Im} \tilde{\Phi} \subseteq SO(3)$.

5) Il reste à mq $SO(3) \subseteq \operatorname{Im} \tilde{\Phi}$. Comme $SO(3)$ est engendré par les retournements. Il suffit de le montrer pour les retournements. Soit $\rho_{\vec{u}}$ un retournement d'axe $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, qu'on identifie au quaternion $U = u_1 I + u_2 J + u_3 K$. Comme $\rho_{\vec{u}}$ et $\rho_{\lambda\vec{u}}$ correspondent au même retournement on peut supposer $\|\vec{u}\| = 1$ de sorte que $U \in \mathbb{I} \cap SU(2)$ donc $U\overline{U} = \mathbb{1}$ et $\overline{U} = -U$ d'où $U^2 = -\mathbb{1}$ et $\tilde{\varphi}_U^{\,2} = \tilde{\varphi}_{U^2} = \tilde{\varphi}_{-\mathbb{1}} = id_{\mathbb{I}}$



Comme $\tilde{\varphi}_U \in SO(3)$ on a $\tilde{\varphi}_U$ est une symétrie orthogonale et il reste à mq $\tilde{\varphi}_U$ fixe une droite. Les potentielles vp sont ± 1 et $\det \tilde{\varphi}_U = 1$ donc -1 est de mult. paire et 1 de mult. impaire. Comme $U \in \mathbb{I}$ et $\ker \tilde{\Phi} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ on a $\tilde{\varphi}_U \neq id_{\mathbb{I}}$ d'où 1 n'est pas de mult. 3 donc elle est de mult. 1

Ainsi $\tilde{\varphi}_U$ est un retournement qui fixe $\vec{u}$ donc $\tilde{\varphi}_U = \rho_{\vec{u}}$.

<u>Conclusion :</u> Par le premier théorème d'isomorphisme $\dfrac{SU(2)}{\ker \tilde{\Phi}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} \tilde{\Phi}$ d'où le resultat. $\boxtimes$